



TITLE:

半単純対称空間への $SL(2, \mathbb{R})$ の固有作用についての組合せ論 (組合せ論的表現論とその応用)

AUTHOR(S):

奥田, 隆幸

CITATION:

奥田, 隆幸. 半単純対称空間への $SL(2, \mathbb{R})$ の固有作用についての組合せ論 (組合せ論的表現論とその応用). 数理解析研究所講究録 2011, 1738: 1-18

ISSUE DATE:

2011-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/170866>

RIGHT:

半単純対称空間への $SL(2, \mathbb{R})$ の固有作用について の組合せ論

東京大学大学院数理科学研究科 奥田 隆幸 (Takayuki Okuda)
Graduate School of Mathematical Science, The University of Tokyo

1 はじめに

本報告では複素半単純リー環 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ と、互いに可換な複素共役を持つ二つの実形 \mathfrak{g} , \mathfrak{g}^c に対して、ある条件を満たす双曲型軌道の存在と、ある条件を満たす冪零軌道の存在が同値であることを述べる (see 定理 2.3).

この話題について取り扱うモチベーションは、次のような幾何的な問題にある.

Problem 1.1. 半単純対称対 (G, H) を固定する. 半単純対称空間 G/H の不連続群としてどのような群が現れるか?

ここでは、 G の離散群 Γ が G/H に自由かつ固有不連続に作用するとき、 Γ を対称空間 G/H の不連続群と呼んでいる. このような問題を考えることは、 G/H と同じ幾何構造を持つ局所対称空間の分類や変形問題を扱う上で重要である (see 小林 [9]).

半単純対称対 (G, H) に対して、 H がコンパクトである場合には、任意の G の離散部分群 Γ は G/H に固有不連続に作用する. さらにこのとき作用が自由であることと、torsion-free であることは同値である. 従ってこの場合には、問題 1.1 は、 G の torsion-free な離散部分群の分類の問題 (H とは無関係) といえる. この報告において興味があるのは、 H が非コンパクトの場合である. この場合には、 G の離散部分群であっても、 G/H に固有不連続に作用するとは限らない. 例えば、ローレンツ対称空間 $SO(n+1, 1)/SO(n, 1)$ について、 $SO(n+1, 1)$ の任意の無限離散部分群は固有不連続に作用しないことが知られている (Calabi–Markus 現象 [4]).

H が非コンパクトの場合の体系的な研究は、80 年代後半の小林 [6, 7, 8] の仕事に始まり、[12, 14, 15, 17, 20] などの結果がある. この話題についてのまとめとしては

[10, 11, 16] などが挙げられる.

この報告の主結果としては、半単純対称空間 G/H に対して、本質的に非可換な不連続群が存在することと、 $SL(2, \mathbb{R})$ の固有作用が存在することは同値であるということを報告する (定理 2.2). 特に、この二つの条件はそれぞれ、ある条件を満たす双曲型軌道の存在、ある条件を満たす冪零軌道の存在と同値であり、これら軌道についての二条件の同値性 (定理 2.3) に絞って証明を行う.

2 主結果

以下の設定を考える.

設定 2.1. G を連結線型半単純リー群, $\sigma : G \rightarrow G$ をリー群としての対合とする. また, H を $G^\sigma := \{g \in G \mid \sigma g = g\}$ の開部分群とする.

この設定において、等質空間 G/H は自然に対称空間の構造を持つ. G のリー環を \mathfrak{g} とし, σ の微分 $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ を同じ記号 σ で表す. H のリー環を \mathfrak{h} とすると, $\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \sigma X = X\}$ である. さらに $\mathfrak{q} := \{X \in \mathfrak{g} \mid \sigma X = -X\}$ としておけば, $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{q}$ となる. また, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ を \mathfrak{g} の複素化とし, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の実形として, $\mathfrak{g}^c := \mathfrak{h} \oplus \sqrt{-1}\mathfrak{q}$ を定め, これを (\mathfrak{g}, σ) の c -dual と呼ぶ. \mathfrak{g}^c についての $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ における複素共役は, σ を反正則に $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ に拡張したものに他ならない.

一般に、複素半単純リー環や実半単純リー環において、その内部自己同型群による軌道を随伴軌道と呼ぶことにする. 特に、複素半単純リー環や実半単純リー環において、その随伴作用が冪零、実対角化可能である元をそれぞれ、冪零元、双曲元と呼び、冪零元からなる随伴軌道を単に冪零軌道、双曲元からなる随伴軌道を単に双曲型軌道と呼ぶ.

本報告の主結果は以下のものである.

定理 2.2. 設定 2.1 において、以下の条件は同値である.

- (i) あるリー群としての準同型 $\Phi : SL(2, \mathbb{R}) \rightarrow G$ が存在して, $SL(2, \mathbb{R})$ は Φ を通じて対称空間 G/H に固有に作用する.
- (ii) 任意の $g \geq 2$ に対して, 対称空間 G/H は種数 g の曲面群 Σ_g と同型な不連続群を持つ.
- (iii) 対称空間 G/H は不連続群 Γ として, *virtually-abelian* でないものを持つ (*i.e.* Γ は位数有限の可換部分群を持たない).
- (iv) $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ のある冪零軌道 \mathcal{O}_{nilp} であって, \mathfrak{g} と交わるが, \mathfrak{g}^c と交わらないものが存在

する.

- (v) $-\mathcal{O}_{hyp} = \mathcal{O}_{hyp}$ を満たす $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の双曲型軌道 \mathcal{O}_{hyp} であって, \mathfrak{g} と交わるが, \mathfrak{g}^c とは交わらないものが存在する.

本報告では, 定理 2.2 の部分的な主張として, 特に組合せ論的な意味合いの強い以下の定理の証明を行う.

定理 2.3. $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ を複素半単純リー環とする. $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の二つの実形 $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^c$ を, それぞれに対応する $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の複素共役が, 互いに可換であるものとする. このとき, 次の条件は同値である:

- (iv) $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の冪零軌道 \mathcal{O}_{nilp} であって, \mathfrak{g} とは交わるが, \mathfrak{g}^c とは交わらないものが存在する.
- (v) $-\mathcal{O}_{hyp} = \mathcal{O}_{hyp}$ となる $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の双曲型軌道 \mathcal{O}_{hyp} であって, \mathfrak{g} とは交わるが, \mathfrak{g}^c とは交わらないものが存在する.

定理 2.2 の詳しい証明についてはこの報告では行わないが, 簡単に証明の筋道を述べておく. まず, 条件 (i) から条件 (ii) と, 条件 (ii) から条件 (iii) の証明については, 固有作用の定義と曲面群の持ち上げについての結果 (cf. Kra [13]) から分かる. 次に, 条件 (i) と条件 (iv) の同値性は小林 [6] の結果を用いて証明される. また, 条件 (iii) と条件 (v) の同値性は Benoist [3] の結果を用いる. 本報告で扱う定理 2.3 によって, 特に条件 (v) から条件 (iv) を証明したことになり, 定理 2.2 の証明が完成することになる. 定理 2.2 の重要な点は, ある不連続群の存在 (cf. (iii)) から, リー群の固有作用に関する存在 (cf. (i)) が導かれるというところである. 上記の証明において条件 (iii) から, 条件 (i) を導く際には定理 2.3 を用いており, 本報告で述べる議論は定理 2.2 の証明において本質的であるといえる.

3 双曲型軌道

3.1 複素半単純リー環の双曲型軌道

この節では, 複素半単純リー環 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の双曲型軌道についての性質を復習する.

まず, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ のカルタン部分代数 $\mathfrak{j}_{\mathbb{C}}$ を一つ固定する. Δ で $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{j}_{\mathbb{C}})$ についてのルート系を表し, $\mathfrak{j}_{\mathbb{C}}$ の複素ベクトル空間としての実形 \mathfrak{j} を $\mathfrak{j} := \{X \in \mathfrak{j}_{\mathbb{C}} \mid \alpha(X) \in \mathbb{R} (\forall \alpha \in \Delta)\}$ とする. 実ベクトル空間 \mathfrak{j} には $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ のキリング形式から正定値内積が誘導される. Δ のワイル群を $W(\Delta)$ で表し, $W(\Delta)$ は \mathfrak{j} に直交変換として作用するものとする. ルート系 Δ

の positive system Δ_+ を一つ選んで固定し, \mathfrak{j} の部分集合 \mathfrak{j}_+ を $\mathfrak{j}_+ := \{X \in \mathfrak{j} \mid \alpha(X) \geq 0 \ (\forall \alpha \in \Delta_+)\}$ とする. このとき, \mathfrak{j}_+ はワイル群 $W(\Delta)$ の作用についての基本領域である. 上記の設定の下に, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の双曲型軌道について次の Fact が成り立つ.

Fact 3.1. $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の任意の双曲型軌道 \mathcal{O}_{hyp} に対して, $\mathcal{O}_{hyp} \cap \mathfrak{j}$ は一つの $W(\Delta)$ -軌道をなす. 特に, \mathfrak{j}_+ の元 $X_{\mathcal{O}_{hyp}}$ であって, $X_{\mathcal{O}_{hyp}} \in \mathcal{O}_{hyp}$ となるものが唯一つ存在する.

ここで, \mathfrak{j}_+ の元はすべて双曲的であるから, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の双曲型軌道 \mathcal{O}_{hyp} に対して, $X_{\mathcal{O}_{hyp}} \in \mathfrak{j}_+$ を与える対応は, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の双曲型軌道全体の集合から \mathfrak{j}_+ への全単射を与えることになる. いま, Δ_+ についての simple system を Π と書けば, Π は \mathfrak{j}^* の基底を与え, $\mathfrak{j}_+ = \{X \in \mathfrak{j} \mid \alpha(X) \geq 0 \ (\forall \alpha \in \Pi)\}$ となる. Π を頂点とする Dynkin 図形について, 各頂点に重みとして実数を与えたものを重み付き Dynkin 図形と呼ぶことにし, 特にすべての重みが非負であるようなものを $\mathbb{R}_{\geq 0}$ -値重み付き Dynkin 図形と呼ぶことにする. \mathfrak{j} と重み付き Dynkin 図形全体の集合は, “ $X \in \mathfrak{j}$ に対して, 頂点 $\alpha \in \Pi$ の重みを $\alpha(X)$ とする重み付き Dynkin 図形を考える” という対応によって一対一であり, さらにこの対応において, \mathfrak{j}_+ と $\mathbb{R}_{\geq 0}$ -値重み付き Dynkin 図形全体の集合とが一対一である. この対応をまとめておこう.

Fact 3.2. $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の双曲型全体の集合と, $\mathbb{R}_{\geq 0}$ -値重み付き Dynkin 図形全体の集合は一対一に対応する. その対応は, 双曲型軌道 \mathcal{O}_{hyp} に対して, Dynkin 図形の各頂点 $\alpha \in \Pi$ の重みを $\alpha(X_{\mathcal{O}_{hyp}}) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ として与えることで得られる.

例 3.3. $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{sl}(6, \mathbb{C})$ の場合,

$$\begin{array}{ccccccccc} a & & b & & c & & d & & e \\ \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ \end{array} \quad a, b, c, d, e \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

という形の図形それぞれが $\mathfrak{sl}(6, \mathbb{C})$ の双曲型軌道と対応する.

3.2 -1 倍作用で保たれる双曲型軌道

この節では, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の双曲型軌道 \mathcal{O}_{hyp} が $-\mathcal{O}_{hyp} = \mathcal{O}_{hyp}$ となるための必要十分条件を与える.

前節の設定において, \mathfrak{j}_+ は $W(\Delta)$ の作用についての基本領域であったが, $-\mathfrak{j}_+$ も $W(\Delta)$ の作用についての基本領域である. このとき, $W(\Delta)$ の元 w_+ であって, \mathfrak{j}_+ を $-\mathfrak{j}_+$ に移すものが唯一つ存在する. これを $W(\Delta)$ の Δ_+ に関する最長元とよぶ. この w_+ に

ついて, 以下の命題が成り立つ:

命題 3.4. $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の双曲型軌道 \mathcal{O}_{hyp} が $-\mathcal{O}_{hyp} = \mathcal{O}_{hyp}$ となることと, $-w_+X_{\mathcal{O}_{hyp}} = X_{\mathcal{O}_{hyp}}$ となることは同値である.

Proof. $-\mathcal{O}_{hyp} = \mathcal{O}_{hyp}$ を仮定して $w_+X_{\mathcal{O}_{hyp}} = -X_{\mathcal{O}_{hyp}}$ を示そう. まず仮定と Fact 3.1 より, $-X_{\mathcal{O}_{hyp}} \in \mathcal{O}_{hyp} \cap \mathfrak{j} = W(\Delta)X_{\mathcal{O}_{hyp}}$ である. $-X_{\mathcal{O}_{hyp}}$ は $-\mathfrak{j}_+$ の元なので, $w_+X_{\mathcal{O}_{hyp}} = -X_{\mathcal{O}_{hyp}}$ でなければならない. 逆に, $-X_{\mathcal{O}_{hyp}} = w_+X_{\mathcal{O}_{hyp}}$ として $-\mathcal{O}_{hyp} = \mathcal{O}_{hyp}$ を示そう. 仮定から, $-X_{\mathcal{O}_{hyp}} \in W(\Delta)X_{\mathcal{O}_{hyp}} = \mathcal{O}_{hyp} \cap \mathfrak{j}$ であり, 特に $-X_{hyp} \in \mathcal{O}_{hyp}$ であることが分かる. これより任意の $X \in \mathcal{O}_{hyp}$ を固定して, $-X \in \mathcal{O}_{hyp}$ を示そう. $X \in \mathcal{O}_{hyp}$ であることから, ある $g \in \text{Int } \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ で $X = g \cdot X_{\mathcal{O}_{hyp}}$ となる. 特に, $-X = g \cdot (-X_{\mathcal{O}_{hyp}})$ である. いま $-X_{\mathcal{O}_{hyp}} \in \mathcal{O}_{hyp}$ なので, $-X \in \mathcal{O}_{hyp}$ が示せた. \square

この命題を重み付き Dynkin 図形の言葉で言い換えよう. そのために \mathfrak{j}^* 上の変換

$$-w_+^* : \mathfrak{j}^* \rightarrow \mathfrak{j}^*, \alpha \mapsto -(\alpha \circ w_+)$$

について考える. w_+ が $W(\Delta)$ の元であることから, $-w_+^*$ は Δ を保つ直交変換で, Δ の simple system を simple system に移すことが分かる. 従って $-w_+^*\Pi$ は Δ の simple system をなすが, $-w_+(\mathfrak{j}_+) = \mathfrak{j}_+$ であることから, $-w_+^*\Pi = \Pi$ であることが分かる. 特に $-w_+^*$ は Π を頂点とする Dynkin 図形の自己同型を引き起こす. さらにこの自己同型は Π を頂点とする重み付き Dynkin 図形の間の変換を引き起こすが, これは \mathfrak{j} と重み付き Dynkin 図形の一対一対応において, \mathfrak{j} への $-w_+$ の作用を, 重み付き Dynkin 図形で実現したものに他ならない. この $-w_+$ が引き起こす重み付き Dynkin 図形の作用について, 命題 3.4 より, 次の系が成り立つ.

系 3.5. 上記の設定において, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の双曲型軌道 \mathcal{O}_{hyp} が $-\mathcal{O}_{hyp} = \mathcal{O}_{hyp}$ であることと, 対応する重み付き Dynkin 図形が, $-w_+$ によって引き起こされる変換で不変であることは同値である.

例 3.6. $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{sl}(6, \mathbb{C})$ の場合, $-w_+$ による重み付き Dynkin 図形の変換は, 180° 回転, つまり

$$\begin{array}{ccccccccc} a & & b & & c & & d & & e \\ \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ \end{array} \mapsto \begin{array}{ccccccccc} e & & d & & c & & b & & a \\ \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ \end{array}$$

で与えられる. 従って, -1 倍で保たれる $\mathfrak{sl}(6, \mathbb{C})$ の双曲型軌道全体の集合と,

$$\begin{array}{ccccccccc} a & & b & & c & & b & & a \\ \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ \end{array} \quad a, b, c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

という形の重み付き *Dynkin* 図形全体の集合とが一一に対応する.

w_+ の位数が 2 であることから, $-w_+$ の位数は 2 であるか恒等変換であるかのいずれかである. したがって, A_l, D_l, E_6 -型以外の複素単純リー環 ($l \in \mathbb{N}$) については, $-w_+^*$ の引き起こす自己同型は恒等変換で与えられる. A_l, D_l, E_6 -型複素単純リー環についての $-w_+$ の様子を以下にまとめておく:

A_l 型 ($l \geq 1, \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{sl}(l+1, \mathbb{C})$) の場合は, $-w_+$ は以下の変換である:

$$\begin{array}{ccccccccccc} a_1 & & a_2 & & & & a_{l-1} & & a_l & & & & \\ \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \cdots & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \cdots & \text{---} & \circ \end{array} \mapsto \begin{array}{ccccccccccc} a_l & & a_{l-1} & & & & a_2 & & a_1 & & & & \\ \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \cdots & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \cdots & \text{---} & \circ \end{array}$$

D_l 型 ($l \geq 4, \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{so}(2l, \mathbb{C})$) の場合は l の偶奇によって様子が異なる.

$$\left\{ \begin{array}{l} l \text{ が偶数の場合は } -w_+ \text{ は恒等変換である.} \\ l \text{ が奇数である場合は } -w_+ \text{ は以下の変換である:} \end{array} \right. \quad \begin{array}{ccc} \begin{array}{ccccccc} & & & & a_l & & \\ & & & & \circ & & \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{l-2} & \swarrow & & \searrow \\ \circ & \circ & \cdots & \circ & & & \end{array} & \mapsto & \begin{array}{ccccccc} & & & & a_{l-1} & & \\ & & & & \circ & & \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{l-2} & \swarrow & & \searrow \\ \circ & \circ & \cdots & \circ & & & \end{array} \end{array}$$

E_6 型 ($\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{e}_6$) の場合は, $-w_+$ は以下の変換である:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_1 & & a_2 & & a_3 & & a_4 & & a_5 \\ \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ \\ & & & & | & & & & \\ & & & & \circ & & & & \\ & & & & a_6 & & & & \end{array} \mapsto \begin{array}{ccccccccc} a_5 & & a_4 & & a_3 & & a_2 & & a_1 \\ \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ \\ & & & & | & & & & \\ & & & & \circ & & & & \\ & & & & a_6 & & & & \end{array}$$

3.3 双曲型軌道と実形

この節では, 複素半単純リー環 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ とその実形 \mathfrak{g} を考え, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の双曲型軌道が \mathfrak{g} と交わるための必要十分条件を与える.

まず, \mathfrak{g} のカルタン分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ を固定する. このとき, $u := \mathfrak{k} \oplus \sqrt{-1}\mathfrak{p}$ は $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ のコンパクト実形である (これは, \mathfrak{g} のカルタン対合についての c -dual は $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ のコンパクト実形であることを意味する). $\mathfrak{p} \subset \sqrt{-1}u$ であることに注意し, \mathfrak{p} の極大可換部分代数 \mathfrak{a}

を一つ選び、さらに $\sqrt{-1}u$ の極大部分可換代数への \mathfrak{a} の拡張も一つ固定し、これを j とする. このとき, j の複素化 $j_{\mathbb{C}} := j \oplus \sqrt{-1}j$ は $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ のカルタン部分代数である. ここで $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, j_{\mathbb{C}})$ についてのルート系を Δ と書けば, $j = \{X \in j_{\mathbb{C}} \mid \alpha(X) \in \mathbb{R} (\forall \alpha \in \Delta)\}$ となる. このとき, $\Sigma := \{\alpha|_{\mathfrak{a}} \in \mathfrak{a}^* \mid \alpha \in \Delta\} \setminus \{0\}$ と定めると, この集合はルート系をなし, これを $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ についての制限ルート系と呼ぶ. Δ のワイル群を $W(\Delta)$, Σ のワイル群を $W(\Sigma)$ と書くことにし, それぞれ j, \mathfrak{a} に直交変換で作用するものとする. Σ の positive system Σ_+ を任意に選ぶと, Δ の positive system Δ_+ であって, 任意の $\alpha \in \Delta$ について, 制限 $\alpha|_{\mathfrak{a}}$ が $\Sigma_+ \cup \{0\}$ に属するものが存在する. このような Δ_+, Σ_+ を一つ固定し, $j_+ := \{X \in j \mid \alpha(X) \geq 0 (\forall \alpha \in \Delta_+)\}$ とすると, 前節の内容はすべて, この j_+ について成立することになる. また, $\mathfrak{a}_+ := \{X \in \mathfrak{a} \mid \xi(X) \geq 0 (\xi \in \Sigma_+)\}$ とすると, この集合は $j_+ \cap \mathfrak{a}$ と等しい. さらに, \mathfrak{a}_+ は $W(\Sigma)$ の \mathfrak{a} への作用における基本領域である. このとき Fact 3.1 の実形版として, 次の Fact も成り立つ:

Fact 3.7. \mathfrak{g} の任意の双曲型軌道 \mathcal{O}_{hyp}^0 に対して, $\mathcal{O}_{hyp}^0 \cap \mathfrak{a}$ は一つの $W(\Sigma)$ -軌道をなす. 特に, \mathfrak{a}_+ の元 $X_{\mathcal{O}_{hyp}^0}$ であって, $X_{\mathcal{O}_{hyp}^0} \in \mathcal{O}_{hyp}^0$ となるものが唯一つ存在する.

$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の双曲型軌道 \mathcal{O}_{hyp} が \mathfrak{g} と交わるための必要十分条件は, Fact 3.1 の言葉を用いて以下のように与えられる.

命題 3.8. $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の双曲型軌道 \mathcal{O}_{hyp} が実形 \mathfrak{g} と交わることと, \mathcal{O}_{hyp} に対応する j_+ の元 $X_{\mathcal{O}_{hyp}}$ が, \mathfrak{a}_+ に属することは同値である.

Proof. $X_{\mathcal{O}_{hyp}} \in \mathfrak{a}_+$ なら \mathcal{O}_{hyp} が \mathfrak{g} と交わることは定義から明らかである. \mathcal{O}_{hyp} が \mathfrak{g} と交わることを仮定して, $X_{\mathcal{O}_{hyp}} \in \mathfrak{a}_+$ を示そう. 仮定より $X \in \mathcal{O}_{hyp} \cap \mathfrak{g}$ となる X が取れる. X を通る \mathfrak{g} の双曲型軌道 \mathcal{O}_{hyp}^0 について, Fact 3.7 より, $X_{\mathcal{O}_{hyp}^0} \in \mathcal{O}_{hyp}^0 \cap \mathfrak{a}_+$ となる $X_{\mathcal{O}_{hyp}^0}$ が唯一つ存在する. $\mathcal{O}_{hyp}^0 \subset \mathcal{O}_{hyp}$ であることと, $\mathfrak{a}_+ \subset j_+$ に注意すると, $X_{\mathcal{O}_{hyp}^0} \in \mathcal{O}_{hyp} \cap j_+$ である. 従って, Fact 3.1 より, $X_{\mathcal{O}_{hyp}^0} = X_{\mathcal{O}_{hyp}}$ でなければならず, 特に $X_{\mathcal{O}_{hyp}} \in \mathfrak{a}_+$ である. \square

一般に複素半単純リー環の実形に対して, 佐武図形と呼ばれる図形が定義される (以下で佐武図形について簡単に紹介するが, 詳しくは荒木 [1] を参照). \mathfrak{g} の佐武図形を用いると, 命題 3.8 を重み付き Dynkin 図形の言葉で理解することができる. 以下ではこのことを解説する.

Δ^+ の simple system を Π とすると, $\{\alpha|_{\mathfrak{a}} \mid \alpha \in \Pi\} \setminus \{0\}$ は Σ^+ の simple system となる. この \mathfrak{a} への制限を視覚的に表すため, Π を頂点とする Dynkin 図形に以下の二種

類の構造を加えたものを, \mathfrak{g} の佐武図形と呼ぶ:

- $\alpha|_{\mathfrak{a}} = 0$ となる頂点 $\alpha \in \Pi$ を黒い頂点で表示する.
- $\alpha|_{\mathfrak{a}} = \beta|_{\mathfrak{a}}$ となる二つの頂点 $\alpha, \beta \in \Pi$ を矢印で結ぶ.

一般に, 三つ以上の Π の元が \mathfrak{a} に制限して互いに等しくなることはなく, 佐武図形において三つ以上の頂点が矢印で互いに結ばれることは無い. この佐武図形を用いて, 双曲型軌道と実形が交わるかどうかの判定を行いたい. Π を頂点とする重み付き Dynkin 図形が, 同じく Π を頂点とする \mathfrak{g} の佐武図形と “マッチする” ということを以下のように定義する:

定義 3.9. Π を頂点とする重み付き Dynkin 図形 D が, Π を頂点とする \mathfrak{g} の佐武図形 S とマッチするとは, 次の二条件を満たすことである:

- 頂点 $\alpha \in \Pi$ に対して, α が S において黒い頂点であれば, D における α の重みはゼロである.
- 頂点 $\alpha, \beta \in \Pi$ に対して, α と β が S において矢印で結ばれていたら, D における α の重みと β の重みは等しい.

重み付き Dynkin 図形は \mathfrak{j} と自然に一対一に対応するのであった. このとき, 次の命題が成り立つ:

命題 3.10. \mathfrak{j} の元 X に対して, $X \in \mathfrak{a}$ であることと, X に対応する重み付き Dynkin 図形が \mathfrak{g} の佐武図形とマッチすることは同値である.

Proof. 定義に戻れば, $X \in \mathfrak{j}$ に対応する重み付き Dynkin 図形が \mathfrak{g} の佐武図形とマッチすることは,

$$\begin{cases} \alpha|_{\mathfrak{a}} = 0 & \Rightarrow \alpha(X) = 0 \quad (\alpha \in \Pi) \\ \alpha|_{\mathfrak{a}} = \beta|_{\mathfrak{a}} & \Rightarrow \alpha(X) = \beta(X) \quad (\alpha, \beta \in \Pi) \end{cases}$$

を満たすことと同値である. このことから \mathfrak{a} の元に対応する重み付き Dynkin 図形が \mathfrak{g} の佐武図形とマッチすることはすぐに分かる. 後は, \mathfrak{j} の部分空間

$$\mathfrak{a}' := \{ X \in \mathfrak{j} \mid X \text{ に対応する重み付き Dynkin 図形が } \mathfrak{g} \text{ の佐武図形とマッチする} \}$$

について, この \mathfrak{a}' の次元が \mathfrak{a} の次元と等しいことを示せばよい. $\{\alpha|_{\mathfrak{a}} \in \mathfrak{a}^* \mid \alpha \in \Pi\} \setminus \{0\}$ を $\{\xi_1, \dots, \xi_m\}$ と書けば, \mathfrak{a}' の次元は m となるが, この集合は \mathfrak{a}^* の基底でもあるから, \mathfrak{a} の次元も m である. よって $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}'$ であり, 命題が証明された. \square

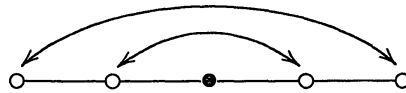
特に命題 3.8 と合わせると次の系が得られる. この系により, $\mathbb{R}_{\geq 0}$ -値重み付き Dynkin 図形でパラメトライズされた $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の双曲型軌道が, 実形 \mathfrak{g} と交わるか否かの判定が出来る.

系 3.11. $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の双曲型軌道 \mathcal{O}_{hyp} が \mathfrak{g} と交わることは, \mathcal{O}_{hyp} に対応する (Π を頂点とする) $\mathbb{R}_{\geq 0}$ -値重み付き Dynkin 図形 $D_{\mathcal{O}_{hyp}}$ が (Π を頂点とする) \mathfrak{g} の佐武図形とマッチすることと同値である.

例 3.12. $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{sl}(6, \mathbb{C})$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(4, 2)$ の場合, $\mathfrak{sl}(6, \mathbb{C})$ の双曲型軌道は

$$\begin{array}{ccccccccc} a & & b & & c & & d & & e \\ \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ \end{array} \quad a, b, c, d, e \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

でパラメトライズされているのであった. $\mathfrak{su}(4, 2)$ の佐武図形は



で与えられるので, 上記のパラメータを持つ $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ の双曲型軌道に対して, \mathfrak{g} と交わることと,

$$\begin{cases} a = e \\ b = d \\ c = 0 \end{cases}$$

となることは同値である.

3.4 双曲型軌道と対称対

命題 2.3 の設定を考える, すなわち複素半単純リー環 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ と, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 上定義された互いに可換な反正則対合 τ, σ を考え, それぞれに対応する実形を $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^c$ とする. 前節の結果から, $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^c$ それぞれに対して都合のよいカルタン部分代数と positive system をとれば, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の双曲型軌道 \mathcal{O}_{hyp} が $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^c$ それぞれと交わるための条件を与えることは可能である. この節では, $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^c$ の両方に対して同時に都合のよいカルタン部分代数と positive system が取れて, 前節の結果を適用できることを紹介する (この節で用いている事実については, 大島-関口 [18] を参照).

$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ のコンパクト実形 \mathfrak{u} で, \mathfrak{u} についての複素共役 θ が τ, σ の両方と可換なものを一つ選んで固定する. θ の $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^c$ への制限はそれぞれのカルタン対合を与えており, 対応する $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^c$ のカルタン分解をそれぞれ $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$, $\mathfrak{g}^c = \mathfrak{k}^c \oplus \mathfrak{p}^c$ と書くことにする. このとき

$u = \mathfrak{k} \oplus \sqrt{-1}\mathfrak{p} = \mathfrak{k}^c \oplus \sqrt{-1}\mathfrak{p}^c$ となっている. さらに $\mathfrak{h} := \mathfrak{g} \cap \mathfrak{g}^c$ とし, θ による \mathfrak{h} の分解を $\mathfrak{h} = \mathfrak{k}(\mathfrak{h}) \oplus \mathfrak{p}(\mathfrak{h})$ とする. ここで包含関係を整理しておくと,

$$\begin{array}{ccc} \sqrt{-1}\mathfrak{u} & \supset & \mathfrak{p} \\ \cup & & \cup \\ \mathfrak{p}^c & \supset & \mathfrak{p}(\mathfrak{h}) \end{array}$$

となっている. このとき $\sqrt{-1}\mathfrak{u}$ の極大可換部分代数 \mathfrak{j} で, 次の三条件を満たすものが存在する.

- $\mathfrak{j} \cap \mathfrak{p}(\mathfrak{h})$ は $\mathfrak{p}(\mathfrak{h})$ の極大可換部分代数である.
- $\mathfrak{a} := \mathfrak{j} \cap \mathfrak{p}$ は \mathfrak{p} の極大可換部分代数である.
- $\mathfrak{a}^c := \mathfrak{j} \cap \mathfrak{p}^c$ は \mathfrak{p}^c の極大可換部分代数である.

このような \mathfrak{j} を一つ固定する. $\mathfrak{j}_c := \mathfrak{j} \oplus \sqrt{-1}\mathfrak{j}$ は \mathfrak{g}_c のカルタン部分代数である. $(\mathfrak{g}_c, \mathfrak{j}_c)$ についてのルート系を Δ とし, $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ についてのルート系を Σ , $(\mathfrak{g}^c, \mathfrak{a}^c)$ についてのルート系を Σ^c とする. このとき, Δ の positive system Δ_+ であって, 次の二条件を満たすものが存在する.

- $\Sigma_+ := \{\alpha|_{\mathfrak{a}} \in \Sigma \mid \alpha \in \Delta_+\} \setminus \{0\}$ は Σ の positive system である.
- $\Sigma_+^c := \{\alpha|_{\mathfrak{a}^c} \in \Sigma^c \mid \alpha \in \Delta_+\} \setminus \{0\}$ は Σ^c の positive system である.

このような positive system Δ_+ を固定し, 前節と同じように, $\mathfrak{j}_+ := \{X \in \mathfrak{j} \mid \alpha(X) \geq 0 \ (\forall \alpha \in \Delta_+)\}$, $\mathfrak{a}_+ := \{X \in \mathfrak{a} \mid \xi(X) \geq 0 \ (\xi \in \Sigma_+)\}$, $\mathfrak{a}_+^c := \{X \in \mathfrak{a}^c \mid \eta(X) \geq 0 \ (\eta \in \Sigma_+^c)\}$ と定める. Δ, Σ, Σ^c についてのワイル群をそれぞれ $W(\Delta), W(\Sigma), W(\Sigma^c)$ とすれば, $\mathfrak{j}_+, \mathfrak{a}_+, \mathfrak{a}_+^c$ はそれぞれ, $W(\Delta), W(\Sigma), W(\Sigma^c)$ についての基本領域であり, $\mathfrak{a}_+ = \mathfrak{j}_+ \cap \mathfrak{a}, \mathfrak{a}_+^c = \mathfrak{j}_+ \cap \mathfrak{a}^c$ が成り立つ.

命題 3.8 をこの枠組みで用いると, 次の命題が得られる.

命題 3.13. \mathfrak{g}_c の双曲型軌道 \mathcal{O}_{hyp} に対して, \mathcal{O}_{hyp} に対応する \mathfrak{j}_+ の元を $X_{\mathcal{O}_{hyp}} \in \mathfrak{j}_+$ とする. このとき, \mathcal{O}_{hyp} が \mathfrak{g} と交わることは, $X_{\mathcal{O}_{hyp}} \in \mathfrak{a}_+$ と同値であり, また, \mathcal{O}_{hyp} が \mathfrak{g}^c と交わることは, $X_{\mathcal{O}_{hyp}} \in \mathfrak{a}_+^c$ と同値である. 特に, \mathcal{O}_{hyp} が \mathfrak{g} と交わるが \mathfrak{g}^c と交わらないということと, $X_{\mathcal{O}_{hyp}} \in \mathfrak{a}_+ \setminus \mathfrak{a}_+^c$ は同値である.

3.5 冪零軌道と双曲型軌道

この節では、複素半単純リー環 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の冪零軌道から双曲型軌道への対応と、その対応において、実形 \mathfrak{g} と交わりを持つか否かの性質が伝播することをまとめて紹介する。

まず複素半単純リー環 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の冪零軌道について、以下の Fact が成り立つ。

Fact 3.14 (Jacobson–Morozov, Kostant). $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の冪零軌道 \mathcal{O}_{nilp} に対して、以下の条件 (★) を満たす双曲型軌道 \mathcal{O}_{hyp} が唯一つ存在する。

条件 (★) : ある複素リー環の準同型 $\psi : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ が存在して、

$$\psi \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_{nilp}, \quad \psi \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_{hyp}$$

を満たす。

Fact 3.15 (Malcev). Fact 3.14 の対応は、 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の冪零軌道全体の集合から $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の双曲型軌道全体の集合への単射を与える。

特に、冪零軌道それぞれに対応する $\mathbb{R}_{\geq 0}$ -値重み付き Dynkin 図形が定義される。冪零軌道から得られる $\mathbb{R}_{\geq 0}$ -値重み付き Dynkin 図形はすべての重みが $\{0, 1, 2\}$ の元であることが知られており (Dynkin [5]), その分類も知られている (cf. Bala–Carter [2]).

例 3.16. $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{sl}(6, \mathbb{C})$ の場合には、冪零軌道から得られる重み付き Dynkin 図形は以下のものですべてである：

記号	重み付き Dynkin 図形
[6]	$\begin{array}{ccccccccc} & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 \\ & \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ \end{array}$
[5, 1]	$\begin{array}{ccccccccc} & 2 & & 2 & & 0 & & 2 & & 2 \\ & \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ \end{array}$
[4, 2]	$\begin{array}{ccccccccc} & 2 & & 0 & & 2 & & 0 & & 2 \\ & \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ \end{array}$
[4, 1 ²]	$\begin{array}{ccccccccc} & 2 & & 1 & & 0 & & 1 & & 2 \\ & \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ \end{array}$
[3 ²]	$\begin{array}{ccccccccc} & 0 & & 2 & & 0 & & 2 & & 0 \\ & \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ \end{array}$
[3, 2, 1]	$\begin{array}{ccccccccc} & 1 & & 1 & & 0 & & 1 & & 1 \\ & \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ \end{array}$

$[3, 1^3]$	2	0	0	0	2
$[2^3]$	0	0	2	0	0
$[2^2, 1^2]$	0	1	0	1	0
$[2, 1^4]$	1	0	0	0	1
$[1^6]$	0	0	0	0	0

また, \mathfrak{g} を $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の実形とする. 次の Fact は $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の冪零軌道が \mathfrak{g} と交わるための必要十分条件を与える.

Fact 3.17 (cf. 関口 [19, Proposition 1.11]). $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ を複素半単純リー環, \mathfrak{g} をその実形とする. Fact 3.14 の対応において, \mathcal{O}_{nilp} が実形 \mathfrak{g} と交わることと, \mathcal{O}_{hyp} が \mathfrak{g} と交わることは同値である.

この Fact と系 3.11 を合わせて考えれば, 以下の例のように, \mathfrak{g} と交わる冪零軌道を分類できる.

例 3.18. $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{sl}(6, \mathbb{C})$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(4, 2)$ の場合, $\mathfrak{su}(4, 2)$ の佐武図形は例 3.12 で紹介したものである. 例 3.16 で与えたりストの中で, $\mathfrak{su}(4, 2)$ の佐武図形とマッチするのは,

$$[5, 1], [4, 1^2], [3^2], [3, 2, 1], [3, 1^3], [2^2, 1^2], [2, 1^4], [1^6]$$

ですべてである. これは $\mathfrak{sl}(6, \mathbb{C})$ の双曲型軌道で $\mathfrak{su}(4, 2)$ と交わるものを分類を与える.

4 命題 2.3 の証明

4.1 条件 (iv) ならば条件 (v) であることの証明

この節では命題 2.3 の条件 (iv) から条件 (v) が導かれることを述べる (このことは, 群の言葉に直して固有作用の定義から証明することもできるが, ここではリー環の随伴軌道の立場での直接的な証明を与える).

Fact 3.14 において, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の冪零軌道から, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の双曲型軌道への対応を与えたのであった. この対応について, 次の命題が成り立つ.

命題 4.1. $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ を複素半単純リー環とする. このとき, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の任意の冪零軌道 $\mathcal{O}_{\text{nilp}}$ に対して, Fact 3.14 の対応において与えられる双曲型軌道 \mathcal{O}_{hyp} は, $-\mathcal{O}_{\text{hyp}} = \mathcal{O}_{\text{hyp}}$ を満たす.

この命題の証明には次の補題が本質的に用いられる.

補題 4.2. 複素単純リー環 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ において, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は同一の随伴軌道に属する.

Proof. 例えば $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C})$ とすれば, $SL(2, \mathbb{C})$ は連結なので $\text{Ad}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right) \in \text{Int } \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ であり,

$$\begin{aligned} \text{Ad}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

この補題を用いて命題 4.1 を証明しよう.

Proof. $X \in \mathcal{O}_{\text{hyp}}$ を任意に固定して, $-X \in \mathcal{O}_{\text{hyp}}$ であることを示せばよい. Fact 3.14 の対応の定義から, ある複素リー環の準同型 $\psi : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ であって,

$$\psi\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_{\text{nilp}}, \quad \psi\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = X$$

となるものがとれる. この ψ について, $\psi\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_{\text{hyp}}$ を示せばよい. 補題 4.2 より, $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ の元 A_1, \dots, A_m で,

$$\text{Exp}(\text{ad}_{\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})} A_1) \circ \dots \circ \text{Exp}(\text{ad}_{\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})} A_m) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となるものがとれる. ここで,

$$g := \text{Exp}(\text{ad}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}} \psi(A_1)) \circ \dots \circ \text{Exp}(\text{ad}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}} \psi(A_m)) \in \text{Int } \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$$

とすれば, $g \cdot \psi \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \psi \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ となる. 従って, $\psi \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_{\text{hyp}}$ である. \square

この Fact と命題 4.1 を用いれば, 以下のように定理 2.3 の条件 (iv) から 条件 (v) が導かれる.

定理 2.3 における (iv) \Rightarrow (v) の証明. $\mathcal{O}_{\text{nilp}}$ を $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の冪零軌道で \mathfrak{g} と交わり, \mathfrak{g}^c とは交わらないものとする. Fact 3.14 によってあたえられる双曲型軌道を \mathcal{O}_{hyp} とすると, 命題 4.1 より, $-\mathcal{O}_{\text{hyp}} = \mathcal{O}_{\text{hyp}}$ である. また Fact 3.17 より, \mathcal{O}_{hyp} は \mathfrak{g} と交わり \mathfrak{g}^c とは交わらないことも分かる. \square

4.2 条件 (v) ならば 条件 (iv) であることの証明

$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ を複素半単純リー環とする. 命題 3.4 より, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の双曲型軌道 \mathcal{O}_{hyp} に対して, $-\mathcal{O}_{\text{hyp}} = \mathcal{O}_{\text{hyp}}$ を満たすことと, 対応する j_+ の元 $X_{\mathcal{O}_{\text{hyp}}}$ が $-w_+$ 不変であることは同値であった. ここでは $j^{-w_+} := \{X \in \mathfrak{j} \mid -w_+X = X\}$ としておく. また Fact 3.14 より, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の冪零軌道 $\mathcal{O}_{\text{nilp}}$ に対して, 対応する $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の双曲型軌道が決まる. 特に Fact 3.1 を通じて, $\mathcal{O}_{\text{nilp}}$ に対応する j_+ の元が決まるが, この場合にはその元を $X_{\mathcal{O}_{\text{nilp}}}$ と書くことにする. さらに, \mathfrak{g} を $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の実形としたとき, Fact 3.17 により $\mathcal{O}_{\text{nilp}}$ が実形 \mathfrak{g} と交わることと, 対応する双曲型軌道が実形 \mathfrak{g} と交わることは同値であった. 命題 3.8 より, これは $X_{\mathcal{O}_{\text{nilp}}}$ が \mathfrak{a}_+ に属することと同値である. 定理 2.3 における (v) \Rightarrow (iv) の証明には次の補題が本質的に用いられる:

補題 4.3. §3.3 の設定において, 次の等式が成り立つ:

$$j^{-w_+} \cap \mathfrak{a} = \mathbb{R}\text{-span}\langle X_{\mathcal{O}_{\text{nilp}}} \in \mathfrak{a}_+ \mid \mathcal{O}_{\text{nilp}} \text{ は } \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \text{ の冪零軌道で, } \mathcal{O}_{\text{nilp}} \cap \mathfrak{g} \neq \emptyset \rangle$$

この補題は冪零軌道の分類と実形の佐武図形を用いて証明される (次の章で証明のアイデアを述べる). 重要なことは, この補題は “複素半単純リー環とその実形” についての主張であって, 対称対についての主張ではないということである. これより補題を認めて定理 2.3 の証明を行うが, そこでは種々の分類は用いず, 抽象論のみで議論を行う. したがって特に, (v) と (iv) の同値性の証明には対称対の分類を用いる必要はない.

補題 4.3 を用いて定理 2.3 における (v) \Rightarrow (iv) の証明を行うため, 以下の二つの系を述べておく. まず §3.4 の設定において, 命題 3.13 から次の系が得られる:

系 4.4. §3.4 の設定において, 次の二条件は同値である:

- (v) $-\mathcal{O}_{hyp} = \mathcal{O}_{hyp}$ を満たす $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の双曲型軌道 \mathcal{O}_{hyp} であって, \mathfrak{g} と交わるが, \mathfrak{g}^c とは交わらないものが存在する.
- (vi) $\mathfrak{j}^{-w+} \cap (\mathfrak{a}_+ \setminus \mathfrak{a}_+^c) \neq \emptyset$.

さらに命題 3.13 から次の系も得られる:

系 4.5. §3.4 の設定において, 次の二条件は同値である:

- (iv) $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の冪零軌道 \mathcal{O}_{nilp} であって \mathfrak{g} と交わるが, \mathfrak{g}^c とは交わらないものが存在する.
- (vii) $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の冪零軌道 \mathcal{O}_{nilp} であって, $X_{\mathcal{O}_{nilp}} \in \mathfrak{a}_+ \setminus \mathfrak{a}_+^c$ となるものが存在する.

従って, ここで証明すべきことは, 条件 (vi) から 条件 (vii) が導かれることである. これを補題 4.3 を用いて証明する.

(vi) \Rightarrow (vii) の証明. $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の冪零軌道で \mathfrak{g} と交わるもの全体の集合を $\{\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_m\}$ とする ($\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の冪零軌道は有限個しかないことに注意). 仮定 “ $\mathfrak{j}^{-w+} \cap (\mathfrak{a}_+ \setminus \mathfrak{a}_+^c) \neq \emptyset$ ” の下で, いずれかの $i \in \{1, \dots, m\}$ について, $\mathcal{O}_i \cap \mathfrak{g}^c = \emptyset$ であることを示そう. 命題 3.8 により, 証明すべきことは, ある i が存在して, $X_{\mathcal{O}_i} \notin \mathfrak{a}_+^c$ となることである. いま仮定から, $X \in \mathfrak{j}^{-w+} \cap (\mathfrak{a}_+ \setminus \mathfrak{a}_+^c)$ となる X が存在する. 補題 4.3 より,

$$X = c_1 X_{\mathcal{O}_1} + \dots + c_m X_{\mathcal{O}_m} \quad (\exists c_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, m)$$

と書ける. もしすべての $i = 1, \dots, m$ について $X_{\mathcal{O}_i} \in \mathfrak{a}_+^c$ であるとする, 右辺は \mathfrak{a}^c の元である. しかし, 左辺は $X \in \mathfrak{a}_+ \setminus \mathfrak{a}_+^c \subset \mathfrak{j}_+$ であり, $\mathfrak{a}_+^c = \mathfrak{j}_+ \cap \mathfrak{a}^c$ であることから, $X \notin \mathfrak{a}^c$ である. これは上記の等式と矛盾している. \square

これより, 補題 4.3 の証明を与えれば, 命題 2.3 の証明が完成することとなる.

5 補題 4.3 の証明のアイデア

この章で, 補題 4.3 の証明のアイデアを述べる. 一般に §3.3 の設定において,

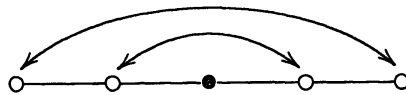
$$\mathfrak{j}^{-w+} \cap \mathfrak{a} \supset \mathbb{R}\text{-span}\langle X_{\mathcal{O}_{nilp}} \in \mathfrak{a}_+ \mid \mathcal{O}_{nilp} \text{ は } \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \text{ の冪零軌道で, } \mathcal{O}_{nilp} \cap \mathfrak{g} \neq \emptyset \rangle$$

となることは, 命題 3.4, 命題 3.8, 命題 4.1 からただちに分かる. 証明すべきことは, $\mathfrak{j}^{-w+} \cap \mathfrak{a}$ が $\{X_{\mathcal{O}_{nilp}} \in \mathfrak{a}_+ \mid \mathcal{O}_{nilp} \text{ は } \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \text{ の冪零軌道で, } \mathcal{O}_{nilp} \cap \mathfrak{g} \neq \emptyset\}$ で張られるということである. これはある意味での “実形 \mathfrak{g} と交わる冪零軌道の多さ” についての主張で

ある. このことの証明には, 冪零軌道の重み付き Dynkin 図形での分類 (cf. Bala-Carter [2]) と, 実形の佐武図形での分類 (cf. 荒木 [1]) を用いる. 方法としては, 各々の半単純リー環 \mathfrak{g} に対して, \mathfrak{g} と交わる $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の冪零軌道 $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_n$ であって, $\{X_{\mathcal{O}_i} \mid i = 1, \dots, n\}$ が $j^{-w_+} \cap \mathfrak{a}$ を張るようなものを重み付き Dynkin 図形の形で一組ずつ与えればよい (\mathfrak{g} が単純の場合だけ確かめれば十分である).

ここでは例として, $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(4, 2)$, また $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}^*(6)$ の二つの場合に補題の証明を行う.

例 5.1. $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{sl}(6, \mathbb{C})$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(4, 2)$ の場合に補題の証明を行う. まず, $\mathfrak{sl}(6, \mathbb{C})$ の重み付き Dynkin 図形において, $-w_+$ が引き起こす変換は 180° 回転で与えられるのであった (cf. 例 3.6). また, $\mathfrak{su}(4, 2)$ の佐武図形は



で与えられる. 従って, $j^{-w_+} \cap \mathfrak{a}$ は

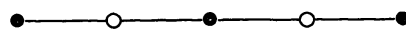
$$\left\{ \begin{array}{ccccc} a & b & 0 & b & a \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \end{array} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

に対応する空間である. 一方, 例 3.16 では冪零軌道に対応する重み付き Dynkin 図形のリストを与えた. これは $\{X_{\mathcal{O}_{nilp}} \mid \mathcal{O}_{nilp} \text{ は } \mathfrak{sl}(6, \mathbb{C}) \text{ の冪零軌道}\}$ の元の重み付き Dynkin 図形のリストに他ならない. このうち, $j^{-w_+} \cap \mathfrak{a}$ の元に対応するのは,

$$[5, 1], [4, 1^2], [3^2], [3, 2, 1], [3, 1^3], [2^2, 1^2], [2, 1^4], [1^6]$$

となる. これらの重み付き Dynkin 図形は, 上記の空間を張る (例えば, $[5, 1], [4, 1^2]$ がこの空間の基底をなす) から, $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(4, 2)$ に対しては補題 4.3 が成立する.

例 5.2. $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{sl}(6, \mathbb{C})$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}^*(6)$ の場合に補題の証明を行う. $\mathfrak{sl}(6, \mathbb{C})$ の重み付き Dynkin 図形において, $-w_+$ が引き起こす変換は 180° 回転であり, $\mathfrak{su}^*(6)$ の佐武図形は



で与えられるから, $j^{-w_+} \cap \mathfrak{a}$ は

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} 0 & a & 0 & a & 0 \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \end{array} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$$

に対応する空間である. 例 3.16 で与えたリストのうち, $j^{-w_+} \cap \mathfrak{a}$ の元と対応するのは,

$$[3^2], [2^2, 1^2], [1^6]$$

となる. これらの重み付き *Dynkin* 図形は, 上記の空間を張る (例えば, $[3^2]$ がこの空間の基底をなす) から, $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}^*(6)$ に対しては補題 4.3 が成立する.

上記の例のように, 一般の \mathfrak{g} に対しても, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の冪零軌道のリストと \mathfrak{g} の佐武図形を用いて, 補題 4.3 が証明される.

参考文献

- [1] S. Araki. On root systems and an infinitesimal classification of irreducible symmetric spaces. *J. Math. Osaka City Univ.*, 13:1–34, 1962.
- [2] P. Bala and R. W. Carter. Classes of unipotent elements in simple algebraic groups. I, II. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 79:401–425, 1976; *bid* 80:1–17, 1976.
- [3] Y. Benoist. Actions propres sur les espaces homogènes réductifs. *Ann. of Math.* (2), 144:315–347, 1996.
- [4] E. Calabi and L. Markus. Relativistic space forms. *Ann. of Math.* (2), 75:63–76, 1962.
- [5] E. B. Dynkin. Semisimple subalgebras of semisimple Lie algebras. *Mat. Sbornik N.S.*, 30(72):349–462 (3 plates), 1952.
- [6] T. Kobayashi. Proper action on a homogeneous space of reductive type. *Math. Ann.*, 285:249–263, 1989.
- [7] T. Kobayashi. Discontinuous groups acting on homogeneous spaces of reductive type. In *Representation theory of Lie groups and Lie algebras (Fuji-Kawaguchiko, 1990)*, pages 59–75. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1992.
- [8] T. Kobayashi. A necessary condition for the existence of compact Clifford-Klein forms of homogeneous spaces of reductive type. *Duke Math. J.*, 67:653–664, 1992.
- [9] T. Kobayashi. Discontinuous groups for non-Riemannian homogeneous spaces. In *Mathematics unlimited—2001 and beyond*, pages 723–747. Springer, Berlin, 2001.
- [10] T. Kobayashi. Introduction to actions of discrete groups on pseudo-Riemannian homogeneous manifolds. *Acta Appl. Math.*, 73:115–131, 2002. The 2000 Twente

Conference on Lie Groups (Enschede).

- [11] T. Kobayashi. On discontinuous group actions on non-Riemannian homogeneous spaces [translation of *Sūgaku* **57** (2005), 267–281]. *Sugaku Expositions*, 22:1–19, 2009. Sugaku Expositions.
- [12] T. Kobayashi and T. Yoshino. Compact Clifford-Klein forms of symmetric spaces—revisited. *Pure Appl. Math. Q.*, 1:591–663, 2005.
- [13] I. Kra. On lifting Kleinian groups to $SL(2, \mathbb{C})$. In *Differential geometry and complex analysis*, pages 181–193. Springer, Berlin, 1985.
- [14] F. Labourie and R. J. Zimmer. On the non-existence of cocompact lattices for $SL(n)/SL(m)$. *Math. Res. Lett.*, 2:75–77, 1995.
- [15] G. A. Margulis. Existence of compact quotients of homogeneous spaces, measurably proper actions, and decay of matrix coefficients. *Bull. Soc. Math. France*, 125(3):447–456, 1997.
- [16] G. A. Margulis. Problems and conjectures in rigidity theory. In *Mathematics: frontiers and perspectives*, pages 161–174. Amer. Math. Soc., 2000.
- [17] H. Oh and D. Witte. Compact Clifford-Klein forms of homogeneous spaces of $SO(2, n)$. *Geom. Dedicata*, 89:25–57, 2002.
- [18] T. Ōshima and J. Sekiguchi. The restricted root system of a semisimple symmetric pair. In *Group representations and systems of differential equations (Tokyo, 1982)*, Adv. Stud. Pure Math., 4:433–497. 1984.
- [19] J. Sekiguchi. Remarks on real nilpotent orbits of a symmetric pair. *J. Math. Soc. Japan*, 39:127–138, 1987.
- [20] R. J. Zimmer. Discrete groups and non-Riemannian homogeneous spaces. *J. Amer. Math. Soc.*, 7:159–168, 1994.